



**UNIVERSIDAD NACIONAL AUTÓNOMA DE MÉXICO**

**ESCUELA NACIONAL PREPARATORIA**

**Plan de estudios 1996**



**Programa  
Matemáticas VI Área IV**

<b>Clave</b> 1620	<b>Semestre / Año</b> 6°	<b>Créditos</b> 20	<b>Área</b>	<b>IV Humanidades y Artes</b>		
			<b>Campo de conocimiento</b>	<b>Matemáticas</b>		
			<b>Etapa</b>	<b>Propedéutica</b>		
<b>Modalidad</b>	<b>Curso (X) Taller ( ) Lab. ( ) Sem. ( )</b>			<b>Tipo</b>	<b>T (X) P ( ) T/P ( )</b>	
<b>Carácter</b>	<b>Obligatorio ( )</b> <b>Optativo ( )</b> <b>Obligatorio de elección (X)</b> <b>Optativo de elección ( )</b>			<b>Horas</b>		
				<b>Semana</b>	<b>Semestre / Año</b>	
				<b>Teóricas: 5</b>	<b>Teóricas: 150</b>	
				<b>Prácticas: 0</b>	<b>Prácticas: 0</b>	
				<b>Total: 5</b>	<b>Total: 150</b>	

<b>Seriación</b>	
<b>Ninguna ( )</b>	
<b>Obligatoria (X)</b>	
<b>Asignatura antecedente</b>	<b>Matemáticas V</b>
<b>Asignatura subsecuente</b>	
<b>Indicativa ( )</b>	
<b>Asignatura antecedente</b>	
<b>Asignatura subsecuente</b>	

Aprobado por el H. Consejo Técnico el 13 de abril de 2018

## I. Presentación

La educación en matemáticas constituye uno de los pilares de la educación de un país, pues impulsa el desarrollo de habilidades de pensamiento como el razonamiento lógico y la abstracción. Cuando este aprendizaje se vincula con situaciones significativas y contextualizadas, que resulten familiares e interesantes, se promueve también el desarrollo de otras habilidades fundamentales en una formación preuniversitaria y ciudadana: la resolución de problemas, el pensamiento crítico, la argumentación y la comunicación (oral, escrita y gráfica).

La enseñanza de Matemáticas en el área de Humanidades y Artes constituye un reto, pues aparentemente hay una relación lejana con la Filosofía, la Literatura, la Música, el Teatro o las Artes Visuales. Sin embargo, existe un espacio común de gran relevancia para la formación de los estudiantes: la simbolización, que implica abstracción. En este sentido, el programa de Matemáticas VI área IV recupera dos clases de símbolos: los que permiten representar las ideas numéricas y los que vinculan la geometría con las artes visuales. Estos modelos promueven la realización de procesos de abstracción al estudiar las paradojas y al abordar la matemática lúdica como un vehículo para reflexionar acerca de las características de diversas estrategias empleadas para ganar.

De esta manera, la asignatura aportará elementos para el desarrollo de habilidades de abstracción y comunicación simbólica que resultarán esenciales a los estudiantes en cualquiera de las carreras para las que se preparan al elegir esta área propedéutica. Cabe señalar que se enfatiza la importancia de contextualizar históricamente los contenidos y reflexionar en torno al papel de las matemáticas en el desarrollo de las ciencias, la filosofía y la cultura, como creación extraordinaria del cerebro humano. En este sentido, el programa ofrece a los estudiantes un espacio para repensar las matemáticas.

En la primera unidad los estudiantes deberán identificar, fundamentar y argumentar las componentes matemáticas del arte, la geometría y la proporción, al analizar manifestaciones provenientes de contextos clásicos como el arte griego o el renacentista; de otros menos conocidos, como el arte árabe; de obras recientes como las de Escher o del arte abstracto implícito en los fractales.

En la segunda unidad se trabajará con las ideas numéricas y su surgimiento en diferentes culturas, para explicarlas en sus contextos históricos. Se revisarán los problemas que dieron lugar a algunas de las representaciones simbólicas más relevantes, abstractas y retadoras de las matemáticas: el número pi, el cero, el uno, los números irracionales y los imaginarios, y el infinito. Por otra parte, se trabajará con algunos números naturales especiales, con la intención de que los estudiantes interpreten una regla matemática o identifiquen las características comunes a un grupo de números, es decir, trabajen con patrones numéricos.

Finalmente, en la tercera unidad los estudiantes pondrán en acción su razonamiento lógico, sus capacidades de abstracción y argumentación para analizar y explicar algunas paradojas geométricas, lógicas y del infinito. Finalmente, la matemática recreativa será el vehículo para promover sus habilidades de pensamiento estratégico para la resolución de problemas.

## **II. Objetivo general**

El alumno desarrollará habilidades de razonamiento lógico y comunicación simbólica verbal, escrita y gráfica, a través de la visualización, identificación y análisis de elementos matemáticos contextualizados en las humanidades y las artes, para fomentar el desarrollo de un pensamiento abstracto que promueva la reflexión, la representación, la interpretación, la argumentación, la imaginación y la creatividad.

## **III. Unidades y número de horas**

### **Unidad 1. Matemáticas en el arte**

Número de horas: 75 horas

### **Unidad 2. Ideas numéricas**

Número de horas: 45 horas

### **Unidad 3. Paradojas y acertijos**

Número de horas: 30 horas

## **IV. Descripción por unidad**

### **Unidad 1. Matemáticas en el arte**

#### **Objetivo específico**

El alumno:

- Desarrollará habilidades de razonamiento lógico, expresión y comunicación simbólica a través de la visualización y reconocimiento de los elementos geométricos presentes en diversas manifestaciones artísticas de la cultura universal, enmarcadas en su contexto histórico, así como de la creación de manifestaciones propias, para promover su creatividad, imaginación y expresión mediante el uso de símbolos.

## **Contenidos conceptuales**

### 1.1 Razón, proporción y escala:

- a) Semejanza
- b) Homotecia
- c) Proporción áurea
- d) Escala de reducción y ampliación

### 1.2 Frisos y grupos de simetría:

- a) Transformaciones: simetría, reflexión, traslación y rotación
- b) Tesela, friso y mosaico

### 1.3 Fractales:

- a) Noción de estructura fractal

### 1.4 Pensamiento espacial:

- a) Integración de un conjunto de vistas bidimensionales para representar un objeto tridimensional.
- b) Representación bidimensional de las diferentes vistas: frontal, lateral y superior, de un objeto tridimensional.

## **Contenidos procedimentales**

1.5 Resolución de problemas que involucren la escala y la razón de proporcionalidad entre figuras y cuerpos geométricos semejantes

1.6 Trazo de figuras y cuerpos geométricos dada una razón de homotecia. Identificación y justificación de la semejanza entre la figura original y la resultante

1.7 Identificación de la proporción áurea en la naturaleza y el arte

1.8 Investigación de las características de los siete frisos y los 17 grupos de simetría.

1.9 Identificación de los frisos y grupos de simetría en manifestaciones artísticas de diversas culturas y épocas (frisos de Mitla, mosaicos de la Alhambra, diseños de Escher, entre otros)

1.10 Diseño de un friso y un mosaico a través de una composición de transformaciones

1.11 Identificación visual de fractales en la naturaleza

1.12 Diseño geométrico de un fractal (triángulo de Sierpinski, curva de Koch o árbol pitagórico)

1.13 Representaciones planas de las formas y relaciones tridimensionales de un arreglo de cubos

1.14 Representación de un arreglo de cubos a partir de sus vistas: frontal, laterales y superior

1.15 Lectura de textos históricos o literarios relacionados con la proporción áurea, la geometría fractal, los diseños de M. C. Escher, o el arte en la Alhambra

## **Contenidos actitudinales**

1.16 Valoración de la geometría para desarrollar procesos de abstracción, visualización y generalización

1.17 Reconocimiento de la importancia de la visualización espacial para representar el entorno

1.18 Apreciación del vínculo histórico entre las matemáticas y las manifestaciones artísticas universales

## Unidad 2. Ideas numéricas

### Objetivos específicos

El alumno:

- Desarrollará habilidades de abstracción y comunicación oral, escrita y gráfica al contrastar el surgimiento de las ideas numéricas en algunas culturas de la antigüedad, para explicar el contexto histórico y los problemas matemáticos que dieron origen a algunas representaciones simbólicas vigentes en la actualidad.
- Desarrollará habilidades de razonamiento lógico y comunicación simbólica al trabajar con patrones numéricos y geométricos para acercarse a las ideas intuitivas y numéricas de las matemáticas.

### Contenidos conceptuales

2.1 La noción de número en diversas culturas

2.2 Números relevantes:  $0$ ,  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\Phi$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $i$

2.3 Noción intuitiva de infinito

2.4 Patrones numéricos y geométricos

### Contenidos procedimentales

2.5 Contraste de la noción de número entre las culturas de la antigüedad y sus representaciones simbólicas

2.6 Estudio de los problemas que dieron origen a los números  $0$ ,  $1$ ,  $\sqrt{2}$ ,  $\Phi$ ,  $\pi$ ,  $e$ ,  $i$ ; y su relevancia en el momento histórico en que surgieron y en la actualidad

2.7 Construcción de algunos números algebraicos con regla y compás:

- a) Operaciones aritméticas (suma, resta, multiplicación, división y raíz cuadrada)
- b) Números irracionales

2.8 Exploración de las ideas intuitiva y numérica del infinito

2.9 Exploración de las propiedades y de la regla para generar algunos números naturales especiales (primo, compuesto, perfectos, feliz, infeliz, odioso, ondulado, vampiro, oblongo, primos gemelos, amigos; primos de Fermat, primos de Mersenne u otros)

2.10 Identificación del patrón, la regularidad o la simetría que genera una secuencia de números o figuras, como en los números figurados, la sucesión de Fibonacci u otras similares

## **Contenidos actitudinales**

- 2.11 Apreciación de las aportaciones de la matemática al saber humano
- 2.12 Valoración del desarrollo científico y filosófico de las civilizaciones antiguas
- 2.13 Reconocimiento de la importancia que tiene, para el desarrollo del conocimiento, la identificación de patrones

## **Unidad 3. Paradojas y acertijos**

### **Objetivos específicos**

El alumno:

- Desarrollará habilidades de análisis, razonamiento lógico, abstracción y argumentación, al explorar paradojas geométricas, lógicas y del infinito para identificar y explicar las contradicciones.
- Desarrollará habilidades de deducción, pensamiento lógico y estratégico a través de actividades lúdicas para resolver problemas.

### **Contenidos conceptuales**

3.1 Paradoja:

- a) Concepto
- b) Paradojas geométricas, de lógica y del infinito

3.2 Noción de falacia

- a) Aritméticas y geométricas

3.3 Estrategias ganadoras en juegos matemáticos

### **Contenidos procedimentales**

3.4 Identificación de lo paradójico en un contexto:

- a) Geométrico (triángulo de Curry, triángulo de Penrose, entre otros)
- b) Lógico (el mentiroso, el barbero, el huevo y la gallina, entre otros)
- c) Del infinito (Aquiles y la tortuga, el hotel de Hilbert, la curva de Koch, el triángulo de Sierpinski, entre otros)

3.5 Análisis de la argumentación de afirmaciones matemáticas inválidas como: todos los triángulos son isósceles,  $1 = 2$ , entre otras, para identificar el error implícito en el argumento

3.6 Identificación de estrategias ganadoras mediante la aplicación de técnicas de resolución de problemas en juegos, acertijos y rompecabezas

3.7 Propuesta de variantes a juegos como: gato, palitos Nim, torres de Hanoi, tangram, ajedrez y go, entre otros, para analizar los cambios en las estrategias ganadoras

## Contenidos actitudinales

- 3.8 Valoración de la importancia del análisis de paradojas en el desarrollo científico
- 3.9 Valoración de las paradojas, demostraciones inválidas y acertijos, como estímulo para la reflexión, el desarrollo de las capacidades analíticas, la comprensión de ideas abstractas, y el desarrollo de destrezas intelectuales
- 3.10 Reconocimiento de la importancia de justificar y comunicar resultados
- 3.11 Apreciación del trabajo colaborativo que enriquece el análisis al compartir diferentes formas de resolver un problema
- 3.12 Valoración del aspecto lúdico de las matemáticas en el desarrollo de un pensamiento estratégico

## V. Sugerencias de trabajo

En el planteamiento de los contenidos del presente programa se busca ofrecer a los estudiantes y docentes la oportunidad de abordar temas de matemáticas cercanos al área propedéutica de las Humanidades y las Artes, que ofrezcan la oportunidad de desarrollar tanto las habilidades de pensamiento abstracto como la creatividad y la imaginación. Una expectativa fundamental es que los contenidos del programa se aborden de manera que resulten interesantes y retadores para los jóvenes.

Es importante adoptar estrategias que ubiquen al estudiante en el centro del proceso educativo, como el aprendizaje basado en investigaciones, en proyectos, o en problemas, que ofrezcan libertad a los estudiantes de expresar su creatividad e imaginación. Se recomienda diseñar actividades que integren el contenido matemático con el contexto histórico y el desarrollo cultural por medio de la literatura, las expresiones artísticas y la filosofía, y además favorezcan el trabajo colaborativo, la discusión de ideas, el intercambio de opiniones, la defensa de posturas personales argumentadas y sustentadas en la investigación de fuentes diversas.

Entre las acciones que se sugieren al profesor para abordar los contenidos de este programa están las siguientes:

- Apoyar el análisis de aspectos geométricos en una selección de imágenes de expresiones artísticas diversas: pintura, escultura, grabado, y promover la investigación de otros ejemplos por parte de los estudiantes.
- Promover el pensamiento espacial, al analizar las vistas planas (frontal, laterales y superior) de un arreglo de cubos para que a partir de la mirada y lectura que el alumno haga de ellas, las integre en una representación tridimensional. O bien, que realice el proceso inverso al visualizar y representar las caras correspondientes de un objeto tridimensional.
- Fomentar la búsqueda de información (artículos, videos, podcasts) en torno a los números y su historia, y el contexto en el que se plantean algunas de las paradojas.

- Promover que los estudiantes apliquen técnicas de resolución de problemas (ensayo y error, empezar por lo fácil, manipular y experimentar, descomponer el problema en otros más pequeños, analizar casos límite, empezar por el final, reducir al absurdo, resolver problemas análogos, hacer esquemas, tablas o dibujos, buscar simetría, conjeturar, etcétera), al buscar estrategias ganadoras.
- Presentar a los alumnos diversos tipos de números naturales especiales para que identifiquen sus propiedades y generen algunos ejemplos.
- Elegir una paradoja que permita analizar sus contenidos matemáticos, y de ser posible vincularlos con algunos otros, como en el caso de la paradoja de Curry, que puede relacionarse con los números de Fibonacci y la razón áurea.
- Incorporar los ejes transversales que deben atenderse en todas las asignaturas, con énfasis en las metas para sexto grado, que esta asignatura permite atender ampliamente:
  - lectura y escritura de textos para aprender y pensar, con énfasis en la producción de un ensayo argumental, es decir, la defensa estructurada de una tesis basada en premisas,
  - desarrollo de habilidades para la investigación y la solución de problemas, a través de la aplicación y elaboración en textos especializados,
  - comprensión de textos en lenguas extranjeras, en particular, la consulta y referencia de textos que traten temas concretos y abstractos de carácter técnico,
  - aprendizajes y construcción de conocimiento con tecnologías de la información y la comunicación, que apoye en el manejo eficiente de herramientas para la elaboración y publicación de productos de investigación,
  - formación en valores en congruencia con la coyuntura de los desafíos y transformaciones del mundo actual, con énfasis en la adopción de valores de manera consciente y significativa y en el avance hacia la autonomía moral.

En lo que se refiere al uso de herramientas digitales, en este curso debe promoverse que los estudiantes desarrollen habilidades de:

- Búsqueda de información y recursos de apoyo, en fuentes confiables en dos idiomas, respetando los derechos de autor mediante el uso de referencias y citas en un formato establecido (sistema APA).
- Manejo de *software* especializado para visualizar, experimentar y manipular diferentes representaciones de un objeto matemático y realizar diseños artísticos propios, basados en estructuras matemáticas.
- Uso de herramientas digitales para el trabajo colaborativo, como las plataformas virtuales, los recursos compartidos en la nube, las redes sociales y otros.

## VI. Sugerencias de evaluación del aprendizaje

El programa de Matemáticas VI Área IV promueve esencialmente el desarrollo del pensamiento abstracto a través de temáticas que ofrecen la oportunidad de desarrollar actividades diversas a lo largo del curso. Se recomienda que para evaluarlas se recurra a instrumentos como: portafolios de evidencias, observación, rúbricas y lista de cotejo, que permitan dar seguimiento al proceso de desarrollo de los estudiantes.

## VII. Fuentes básicas

- Albertí, M. (2014). *El mosaico sin fin. Teselaciones y dibujos sobre el plano*. España: National Geographic.
- Balmori, S. (1997). *Áurea medida*. México: UNAM.
- Corbalán, F. (2010). *La proporción áurea. El lenguaje matemático de la belleza*. España: National Geographic.
- Doczi, G. (2005). *El poder de los límites: Proporciones armónicas en la naturaleza, el arte y la arquitectura*. Argentina: Troquel.
- Estrada, W. (2004). *Geometría fractal: conceptos y procedimientos para la construcción de fractales*. Colombia: Magisterio.
- Hidalgo, S. (2007). *Temas de matemáticas para el bachillerato. Mosaicos*. México: UNAM, Instituto de Matemáticas.

## VIII. Fuentes complementarias

- Anaya, S. (1990). *Carrusel matemático*. México: Limusa.
- Beckmann, P. (2006). *Historia de  $\pi$* . México: Qued, CNCA
- Capó, M. (2017). *Matemáticas del 1 al 100*. México: Paidós.
- Castelnuovo, E. (2001). *De viaje con la matemática. Imaginación y razonamiento matemático*. México: Trillas.
- D'Amore, B. y Fandiño, M. (2014). *El número cero. Aspectos históricos, epistemológicos, filosóficos, conceptuales y didácticos del número más misterioso*. México: NEISA
- Falconi, M. y Hoyos, V. (2005). *Instrumentos y matemáticas. Historia, fundamentos y perspectivas educativas*. México: UNAM, Facultad de Ciencias.
- Farlow, S. (2014). *Paradoxes in mathematics*. Nueva York: Dover.
- Flores, G. (1987). *Nuevos juegos mentales*. México: Grupo editorial Sayrols.
- Garciadiego, A. y Carpio, E. (2011). *Uno, dos, tres..., infinito..., y más allá*. Madrid: Nivola.
- Garciadiego, A. (2014). *Infinito, paradojas y principios*. España: Plaza y Valdés.
- Gardner, M. (1989). *Juegos matemáticos*. México: Selector.
- Gracián, E. (2010). *Un descubrimiento sin fin. El infinito matemático*. España: National Geographic.
- Hernández, J. y Donaire, J. (2007). *Desafíos de geometría 1*. España: Nivola.
- Ivear, C. (2003). *Introducción a la historia del arte*. México: Limusa.

- Kasner, E. y Newman, J. (1982). *Matemáticas e imaginación*. México: C.E.C.S.A.
- Kline, M. (2006). *Matemáticas y el mundo físico*. México: Siglo veintiuno editores.
- (2009). *Matemáticas y el mundo occidental*. México: Fondo de Cultura Económica.
- Meavilla, V. (2010). *La sinfonía de Pitágoras*. España: Almuzara.
- (2011). *El lobo, la cabra y la col*. España: Almuzara.
- (2012). *Eso no estaba en mi libro de matemáticas*. España: Almuzara.
- (2015). *Siete ancianos van a Roma y otros problemas clásicos de las matemáticas*. España: Almuzara.
- (2016). *El arte de las matemáticas: Los principios matemáticos a través de la pintura*. España: Guadalmazán.
- Navarro, J. (2010). *Los secretos del número  $\pi$ . ¿Por qué es imposible la cuadratura del círculo?* España: National Geographic.
- Paenza, A. (2012). *¿Y eso también es matemáticas?* México: Debate.
- Pickover, C. (2009). *Las matemáticas de Oz. Gimnasia mental más allá del límite*. España: Almuzara.
- (2016). *El libro de las matemáticas*. España: Librero.
- Reyes, J. (2014). *La geometría y nuestro entorno: y el mundo jamás volvió a ser plano*. México: Trillas.
- Rittaud, B. (2006). *Qué irracional: El fabuloso destino de  $\sqrt{2}$* . México: Qued, CNCA
- Ruiz, C. y De Régules, S. (2002). *El piropo matemático: De los números a las estrellas*. México: Lectorum.
- Sáenz, E. (2016). *Inteligencia matemática. Descubre al matemático que llevas dentro*. España: Plataforma editorial.
- Sarcone, G. y Waeber, M. (2013). *Impossible folding puzzles and other mathematical paradoxes*. Nueva York: Dover.
- Stewart, I. (2001). *El laberinto mágico*. España: Crítica.
- (2016). *Números increíbles*. México: Paidós.
- Velasco, G., y Antoniano, E. (2015). *Curiosidades matemáticas. Sorpresas, paradojas, enigmas y maravillas del mundo de la matemática*. México: Limusa.
- Wapner, L. (2011). *El chícharo y el sol. Una paradoja matemática*. México: Universidad Veracruzana.

#### Referencias Electrónicas

- BBC Mundo: Las matemáticas escondidas en las grandes obras de arte. Recuperado de [http://www.bbc.com/mundo/especial/vert\\_cul/2016/03/160317\\_vert\\_matematica\\_en\\_obras\\_de\\_arte\\_yv](http://www.bbc.com/mundo/especial/vert_cul/2016/03/160317_vert_matematica_en_obras_de_arte_yv)
- Cambios en las nociones de número, unidad, cantidad y magnitud. Recuperado de <https://www.uv.es/gomez/19Cambios.pdf>
- Educational designer, A designer speak: Peter Boon. Recuperado de <http://www.educationaldesigner.org/ed/volume1/issue2/article7/>
- Encyclopaedia Britannica. Brain games: 8 philosophical puzzles and paradoxes. Recuperado de <https://www.britannica.com/list/8-philosophical-puzzles-and-paradoxes>

Grattan-Guinness, I. *The mathematics of the past: distinguishing its history from our heritage* en Historia Mathematica. Vol. 31. Recuperado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086003000326>

M.C. Escher. The oficial website. Recuperado de <http://www.mcescher.com/>

Ruizsánchez Serra, J.M. (2001). Contar hasta el infinito. Tesis. UNAM, Facultad de Ciencias. Recuperado de <http://ru.ameyalli.dgdc.unam.mx/bitstream/handle/123456789/471/tesis63-contar.pdf?sequence=1&isAllowed=y>

Sáenz de Cabezón, E. Derivando. Recuperado de [https://www.youtube.com/channel/UCH-Z8ya93m7\\_RD02WsCSZYA](https://www.youtube.com/channel/UCH-Z8ya93m7_RD02WsCSZYA)

Science alert. 7 times Mathematics became art and blew our minds. Recuperado de <https://www.sciencealert.com/7-times-mathematics-became-art-and-blew-our-minds>

Scientific American Blog Network. Making, mathematical art. Recuperado de <https://blogs.scientificamerican.com/guest-blog/making-mathematical-art/>

TED. Ideas worth spreading. Recuperado de <https://www.ted.com/>

Tessellations. Recuperado de <http://tessellations.org/index.shtml>

The Guardian. Why the history of maths is also the history of art? Recuperado de <https://www.theguardian.com/science/alexs-adventures-in-numberland/2015/dec/02/why-the-history-of-maths-is-also-the-history-of-art>

Virtual Math Museum. Recuperado de <http://virtualmathmuseum.org/mathart/MathematicalArt.html>

Weeks, J. Software de Topología y Geometría. Recuperado de <http://www.geometrygames.org/>

Software sugerido

GeoGebra (geogebra.org)

MathType

Recursos y herramientas Geogebra (tube.geogebra.org)